

02 感知机

本课程的第一个完整线性分类模型

1 线性模型与推理

从线性分数、决策边界到离散类别

■ 训练样本

- $x \in \mathbb{R}^d$ 表示特征向量
- $y \in \{-1, +1\}$ 表示类别标签

■ 线性分数

- $f(x) = w^T x + b$
- w 是特征权重, b 是偏置

■ 分类输出

- 预测取决于分数的符号
- $\hat{y} = \text{sign}(f(x))$

■ 决策边界

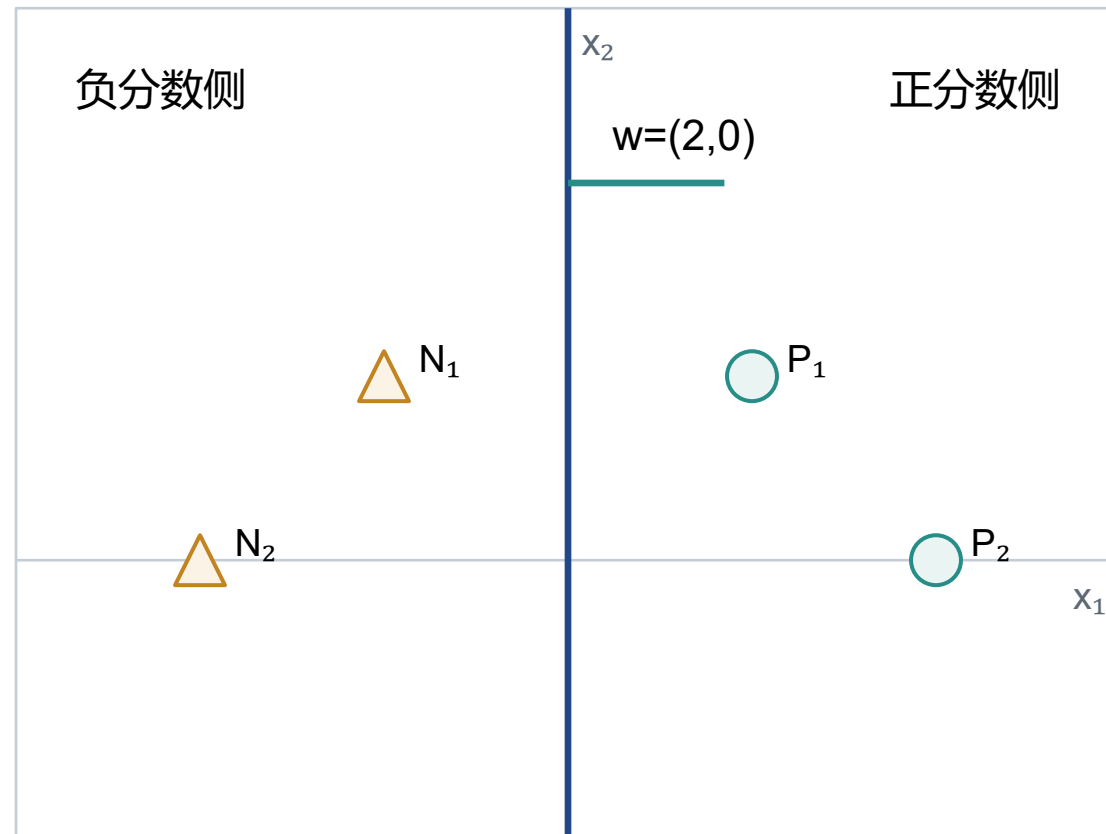
- 由零分数点组成
- $w^T x + b = 0$
- 二维中是直线，高维中是超平面

■ 参数的几何作用

- w 决定法向方向， b 影响边界位置

■ 线性可分

- 存在一组 w, b ，使全部训练样本位于正确一侧



圆形：+1 三角形：-1

■ 训练

- 输入：带标签训练集、初始参数和学习率
- 处理：判断训练样本是否位于正确一侧，必要时更新参数
- 输出：训练后的参数 w^*, b^*

■ 推理

- 输入：新样本和固定参数 w^*, b^*
- 处理：计算线性分数并取符号
- 输出：预测类别 $\hat{y}$
- 边界：只使用新样本和固定参数，无需真实标签

2 误分类驱动训练

以感知机损失表达错误侧的有符号偏离，沿负梯度更新参数，并在整轮无更新时停止

■ 统一判断

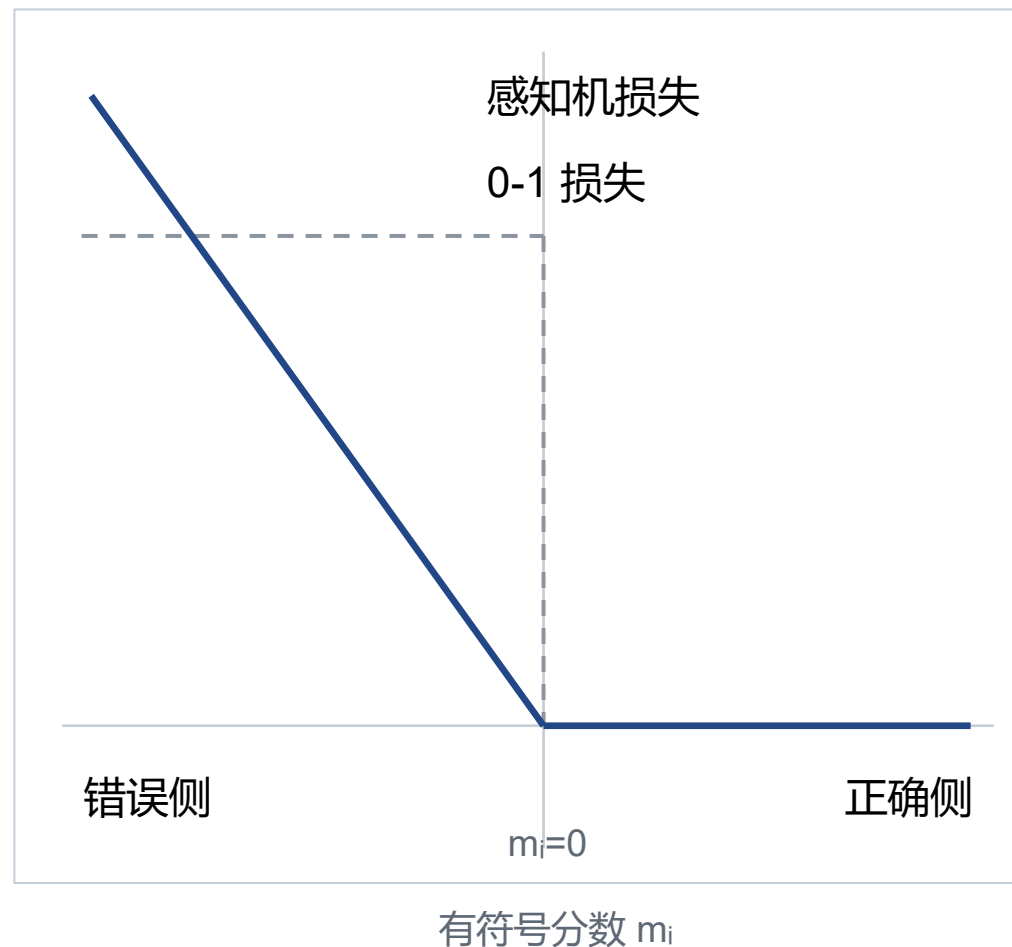
- $m_i = y_i f(x_i)$: 正值表示正确侧, 负值表示错误侧

■ 从离散对错到连续损失

- 0-1 损失只记录对错; $\ell_i = \max(0, -m_i)$ 还反映错误侧相对零分数的偏离
- $m_i < 0$ 时, $\ell_i = -y_i(w^T x_i + b)$, 可对参数求梯度

■ 边界约定

- $m_i > 0$ 时损失为零, 不更新
- $m_i = 0$ 时损失为零且不可导; 本讲约定更新



从负梯度到参数更新

■ 误分类区域的梯度

- $m_i < 0$ 时, $\ell_i = -y_i(w^T x_i + b)$
- $\nabla_w \ell_i = -y_i x_i, \partial \ell_i / \partial b = -y_i$

■ 沿负梯度更新

- 梯度指向损失增加的方向, 因此沿相反方向更新
- $w \leftarrow w - \eta \nabla_w \ell_i = w + \eta y_i x_i$
- $b \leftarrow b - \eta \partial \ell_i / \partial b = b + \eta y_i$, 其中 $\eta > 0$

■ 结果与边界

- $m'_i = m_i + \eta(\|x_i\|^2 + 1) > m_i$, 故当前损失减小
- 这不保证同时改善所有样本; $m_i = 0$ 是否更新仍由算法约定

正类样本 $y_i = +1$

$$w \quad -\eta \nabla \ell_i = +\eta x_i$$

负类样本 $y_i = -1$

$$-\eta \nabla \ell_i = -\eta x_i \quad w$$

两类都沿负梯度更新, 使当前样本损失减小

- **1 初始化**: 设定参数 w, b 与固定正学习率 η
- **2 开始一轮**: 将本轮状态记为 “没有更新”
- **3 逐个检查**: 计算 $m_i = y_i(w^T x_i + b)$
- **4 沿负梯度更新**: 若 $m_i < 0$, 按上一页的更新式修改 w, b ; 若 $m_i = 0$, 按本讲约定执行同一更新, 并将本轮状态记为 “发生更新”
- **5 检查停止**: 整轮没有更新则输出 w^*, b^* ; 否则开始下一轮

■ 训练样本

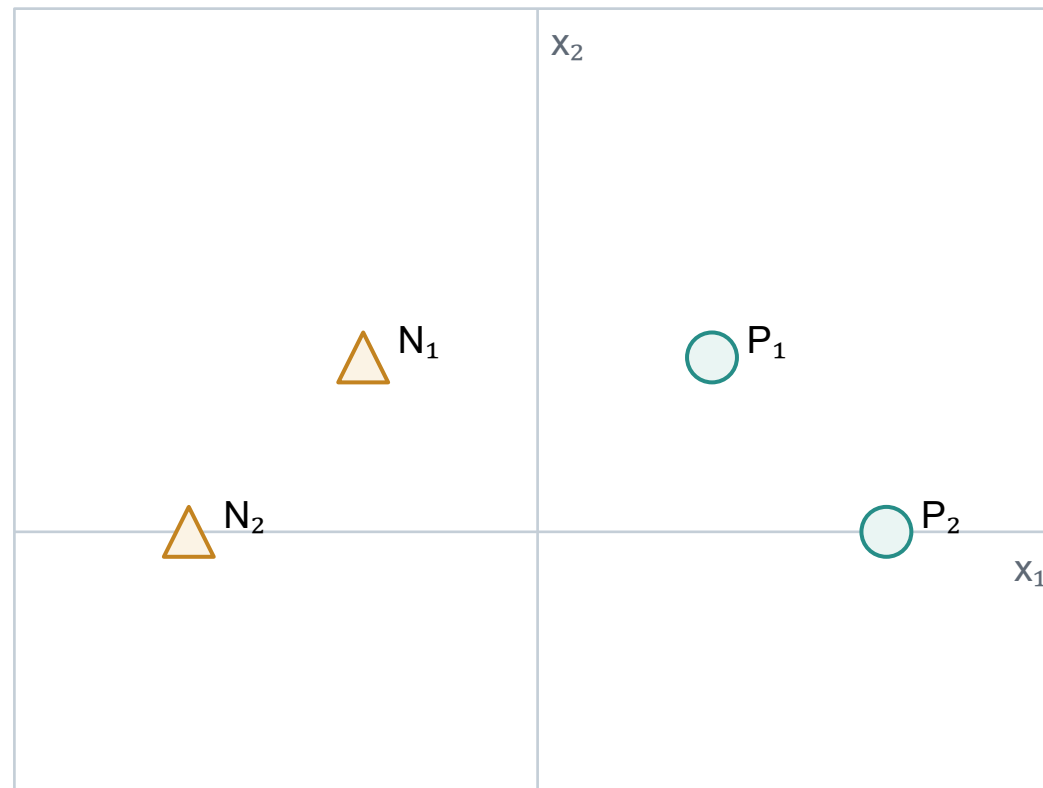
- 正类: $P_1=(1,1)$, $P_2=(2,0)$
- 负类: $N_1=(-1,1)$, $N_2=(-2,0)$

■ 访问顺序

- P_1 、 N_1 、 P_2 、 N_2 , 循环访问

■ 初始化与规则

- $w^{(0)} = (0,0)$, $b^{(0)} = 0$, $\eta = 1$
- $m_i \leq 0$ 时更新; 完整一轮无更新时停止



圆形: +1 三角形: -1

初始: 尚未形成有效决策边界

第一次更新：零分数触发更新

■ 当前样本

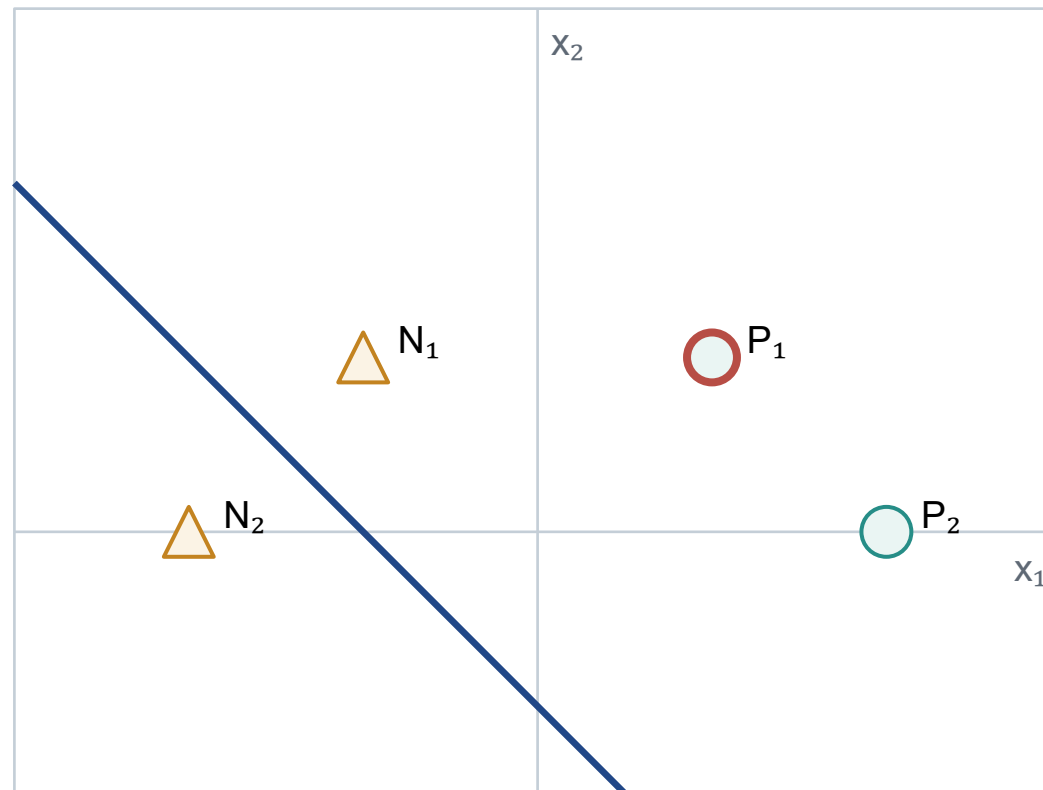
- $P_1=(1,1)$, $y(P_1)=+1$

■ 触发判断

- $f(P_1) = 0$, $m(P_1) = 0$
- 按零分数约定触发更新

■ 更新结果

- $w^{(1)} = (0,0) + (1,1) = (1,1)$
- $b^{(1)} = 0 + 1 = 1$
- 新边界： $x_1 + x_2 + 1 = 0$



圆形： +1 三角形： -1

第 1 次更新后： $x_1+x_2+1=0$

第二次更新：负类样本仍被判为正类

■ 当前样本

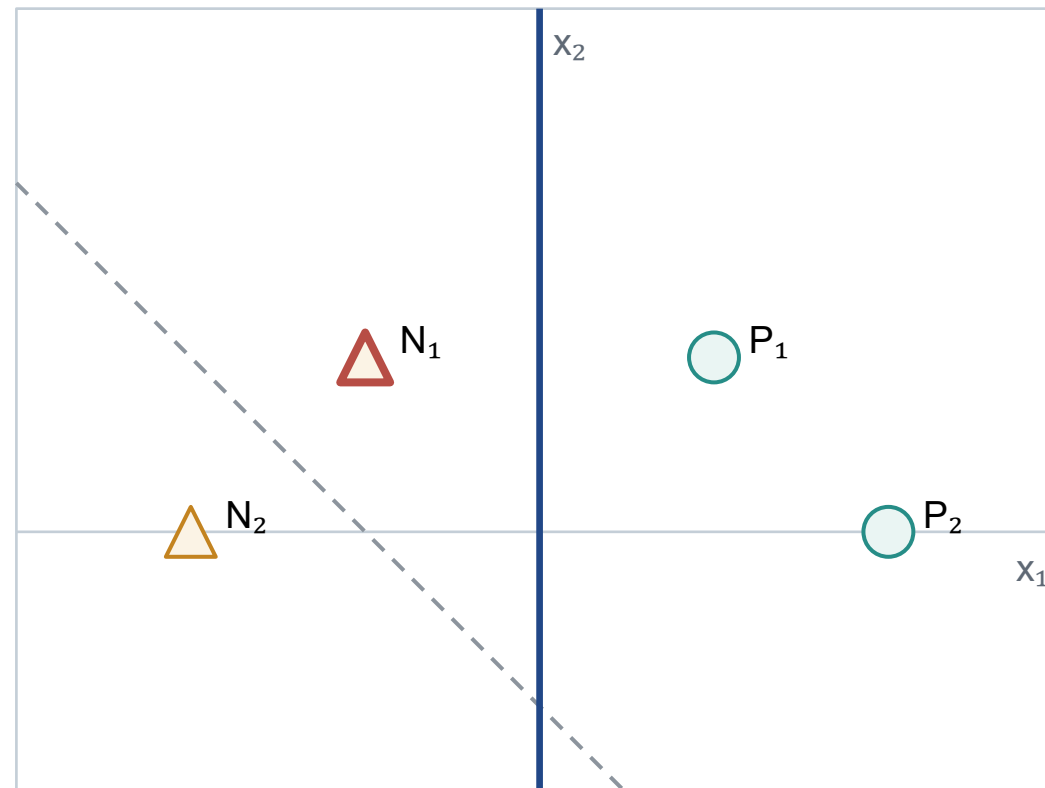
- $N_1 = (-1, 1)$, $y(N_1) = -1$

■ 触发判断

- $f(N_1) = -1 + 1 + 1 = 1$
- $m(N_1) = (-1) \times 1 = -1$, 触发更新

■ 更新结果

- $w^{(2)} = (1, 1) - (-1, 1) = (2, 0)$
- $b^{(2)} = 1 - 1 = 0$
- 新边界: $x_1 = 0$



圆形: +1 三角形: -1

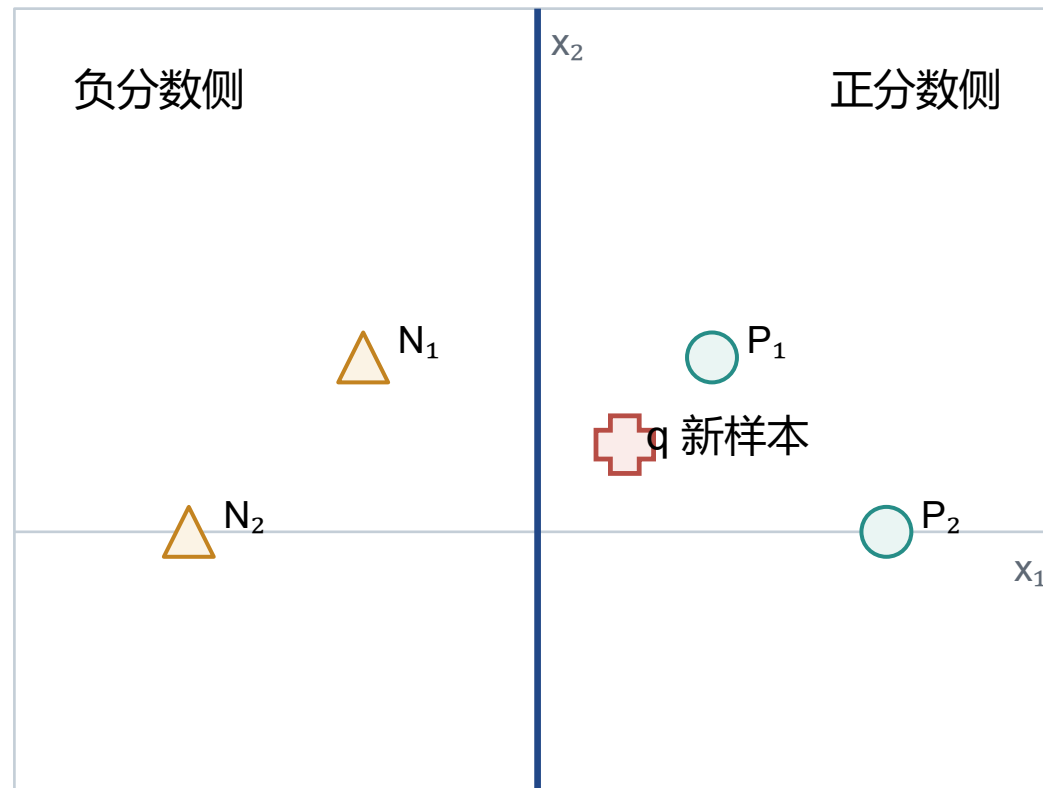
第 2 次更新后: $x_1=0$

■ 停止检查

- 第一轮余下样本均分类正确
- $P_2: m = 4$
- $N_2: m = 4$
- 随后一整轮的有符号分数均为正
- 整轮没有更新, 输出 $w^* = (2, 0)$, $b^* = 0$

■ 新样本推理

- $q = (0.5, 0.5)$
- $f^*(q) = 2 \times 0.5 = 1 > 0$, $\hat{y} = +1$



圆形: +1 三角形: -1

整轮无更新, q 预测为 +1

3 条件、边界与表示

有限停止依赖线性可分；对偶形式只改变参数组织

■ 成立条件与保证

- 训练集有限，并存在能正确分开全部样本的线性边界
- 使用固定正学习率并循环访问样本时，标准感知机经过有限次错误更新可找到一个分离超平面

■ 该保证的边界

- 分离超平面通常不唯一，所得结果可能受初始化和访问顺序影响
- 不保证边界最优，也不提供特定的泛化保证

■ 线性不可分训练集

- 不存在能正确分开全部训练样本的线性边界
- 基础感知机可能持续更新，不能保证在有限步内停止

■ 参数表示

- 从零初始化后，每次更新都向权重加入一项 $\eta y_i x_i$
- α_i 是样本 i 的非负累积更新系数
- 因此，权重可以写成训练样本的线性组合
- $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i x_i$

■ 计算组织

- 代入线性分数后，主要计算可改写为训练样本之间的内积
- Gram 矩阵记录训练样本的两两内积
- $G_{ij} = x_i^T x_j$

■ 与原始形式的关系

- 偏置 b 仍随误分类更新单独维护，也可通过增广特征统一表示
- 对偶形式改变参数表示和计算组织，不改变二分类目标与最终推理规则

■ 模型与推理

- $f(x) = w^T x + b$ 产生连续分数，符号给出离散类别
- 固定训练后参数，对新样本计算分数并预测类别

■ 训练与停止

- 根据 $y_i f(x_i)$ 判断错误；在误分类区域沿感知机损失的负梯度更新参数
- 零分数样本按约定更新；完整一轮没有更新时输出 w^*, b^*

■ 边界、表示与课程接口

- 有限停止依赖线性可分等条件，结果可能不唯一
- 对偶形式改变权重表示和内积计算，不改变预测目标
- 本讲把上一讲的共同框架落实为完整线性分类模型，并为后续方法提供线性分数与训练—推理参照